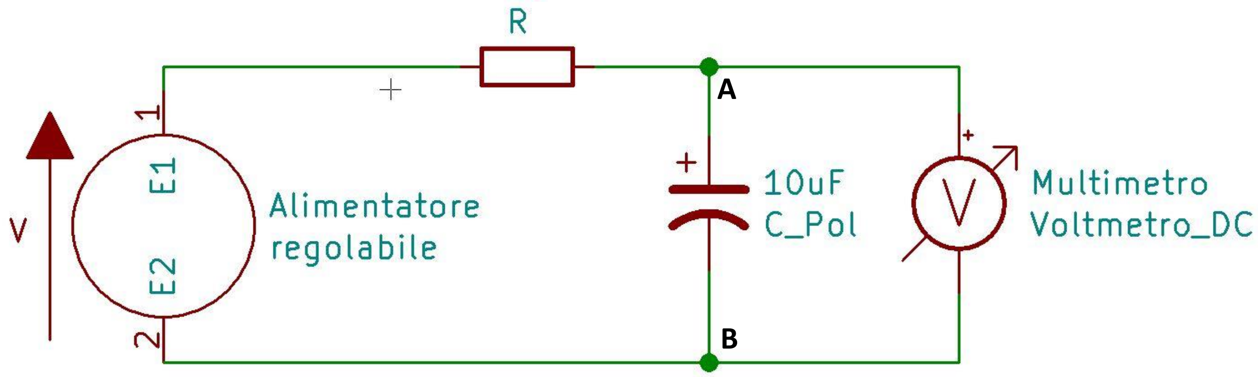
Misura della costante di tempo di un circuito RC

Vogliamo misurare la costante di tempo durante la carica, misurando la tensione ai capi del condensatore. Utilizziamo il seguente circuito:

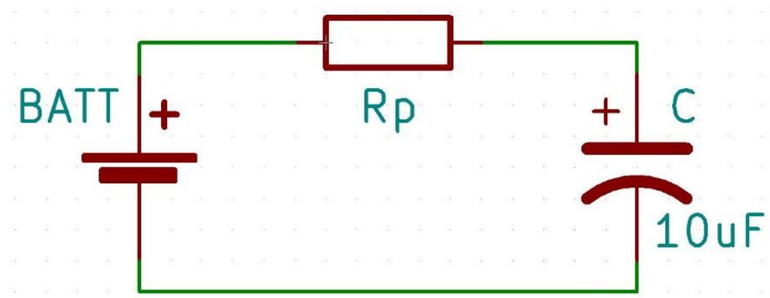


Dove il voltmetro ha una resistenza interna R_V=10 Mohm. Ci domandiamo quale resistenza vede il condensatore durante la carica? Qual è l'effetto della R_V?

Possiamo risolvere il circuito in due modi, con il teorema di Thevenin o risolvendo il circuito con il metodo di Kirchhoff.

Thevenin

Immaginiamo di togliere il condensatore e far partire due fili dai punti A e B, quindi racchiudere il tutto in una scatola. Se la scatola contiene solo generatori di tensione o corrente e impedenze possiamo applicare il teorema di Thevenin. Il teorema dice che tutto quello che è nella scatola equivale a un generatore ideale di tensione con una resistenza interna. La fem del generatore è uguale alla tensione fra i punti A e B, la resistenza interna è la resistenza vista dai punti A e B quando ai generatori di tensione si sostituisce un corto circuito, quindi:



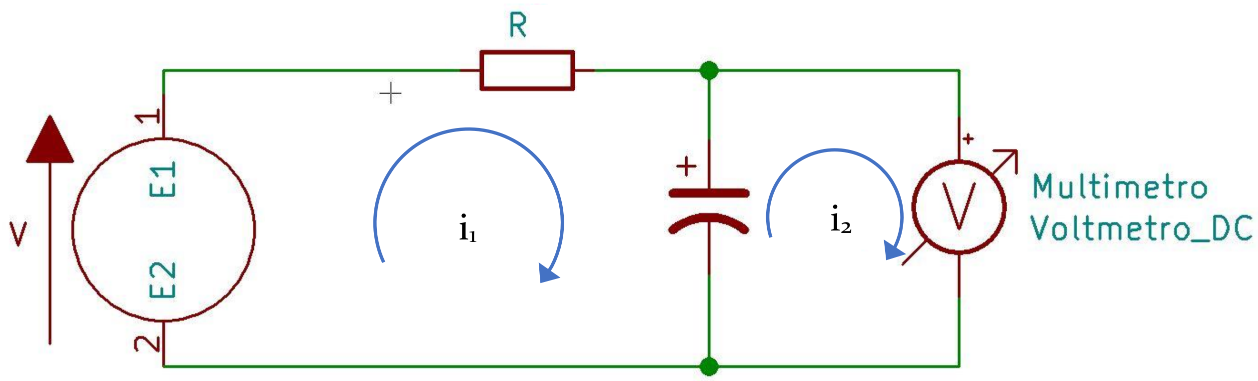
Dove Rp è il parallelo di R e R_V, e la batteria ha la tensione del nodo A nel partitore fra R e R_V del circuito precedente. Il risultato che da il parallelo delle due resistenze è evidentemente piuttosto contro intuitivo.

Kirchhoff

Risolvere il circuito secondo Kirchhoff è più laborioso; per contro ci permette di ricavare tutti i dettagli del cicruito. Iniziamo considerando l'equazione del singolo condensatore

$$dV = \frac{dQ}{C} = \frac{1}{C} idt$$

$$V(t) = \frac{1}{C}\int_0^t idt + V(0)$$



$$\begin{cases} V = Ri_1 + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i_1 dt + V(0) \\ 0 = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i_2 dt + V(0) + R_V i_2 \end{cases}$$

Consideriamo la corrente che passa nel condensatore i_C rispetto alle correnti di maglia

$$i_C = i_2 - i_1$$

Dal sistema ricaviamo le correnti di maglia

$$\begin{cases} i_1 = \dfrac{V}{R} - \dfrac{1}{RC}\displaystyle\int_0^t i_1 dt - V(0) \\ i_2 = -\dfrac{1}{R_V C}\displaystyle\int_0^t i_2 dt - V(0) \end{cases}$$

Sostituiamo nell'equazione della corrente i_C

$$i_C = -\frac{1}{R_V C}\int_0^t i_2 dt + \frac{1}{RC}\int_0^t i_1 dt - \frac{V}{R}$$

$$i_C = -\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_V}\right)\frac{1}{C}\int_0^t (i_2 - i_1) dt - \frac{V}{R}$$

Poniamo $\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_V}$ e deriviamo

$$\frac{di_C}{dt} = -\frac{1}{R_p C} i_C$$

Che ha come soluzione

$$i_C = i_0 e^{-\frac{t}{R_p C}}$$

Che conferma l'andamento esponenziale con costante di tempo $\tau = R_p C$.